日本機械学会論文集(A編)
69巻684号(2003-8)

論文 No. 02-1435

異種材料接合界面近傍に存在する回転だ円体状介在物による応力集中*

野田尚昭*1, 森山泰嘉*2

Stress Concentration of an Ellipsoidal Inclusion of Revolution in the Vicinity of a Bimaterial Interface

Nao-Aki NODA*3 and Yasuhiro MORIYAMA

*3 Department of Mechanical Engineering, Kyushu Institute of Technology,
1-1 Sensui-cho, Tobata-ku, Kitakyushu-shi, Fukuoka, 804-8550 Japan

This paper deals with a stress concentration problem of an ellipsoidal inclusion of revolution in a bimaterial body under tension. The problem is formulated as a system of singular equations with Cauchy-type or logarithmic-type singularities, where unknowns are densities of body forces distributed in the r-and z-directions in bimaterial boodies having the same elastic constants of those of the given problem. In order to satisfy the boundary conditions along the ellipsoidal boundary, four fundamental density functions proposed in the previous paper are used. Then the body force densities are approximated by a linear combination of fundamental density functions and polynomials. The present method is found to yield rapidly converging numerical results for stress distribution along the boundaries of both the matrix and inclusion even when the inclusion is very close to the bimaterial interface. Then, the effect of bimaterial surface on the stress concentration factor is discussed with varying the distance from bimaterial interface, shape ratio, and elastic ratio.

Key Words: Elasticity, Stress Concentration, Body Force Method, Ellipsoidal Inclusion, Singular Integral Equation, Numerical Analysis

1. 緒　言

最近，高機能・高強度・軽量化などを目的として，異材の接合・複合化が進み，その強度評価が重要となっている．このような多くの複合材料はその界面の強度によって主として支配されている．その場合に界面近傍に存在する欠陥の影響が問題となることがしばしば観察されている．欠陥のモデルとしては通常き裂が用いられており(1)~(9)，著者らもだ円形き裂と異種接合界面との干渉効果を最近取り扱った(10)．本研究では欠陥のみならず強化粒子や強化繊維のモデルとしても重要な回転だ円体状介在物を取り扱う．これは，図1に示すように形状比a/bと剛性比E_I/E_{M1}を変化させることによって，様々な欠陥を表現できる．例えば，介在物を取り扱った最近の研究としてKourisらの半球状介在物の解析(11)や土田らの球状介在物の解析(12)(13)が挙げられるが，回転だ円体状介在物のアスペクト比a/bを種々に変化させて介在物の形状の影響を詳しく論じた研究は少ないようである．

解析法として，本研究は体積力法の特異積分方程式の未知関数を基本密度関数と多項式の積で近似する方法(14)を用いる．そして，母材と介在物の剛性比や介在物の形状比，接合界面からの距離，接合材料

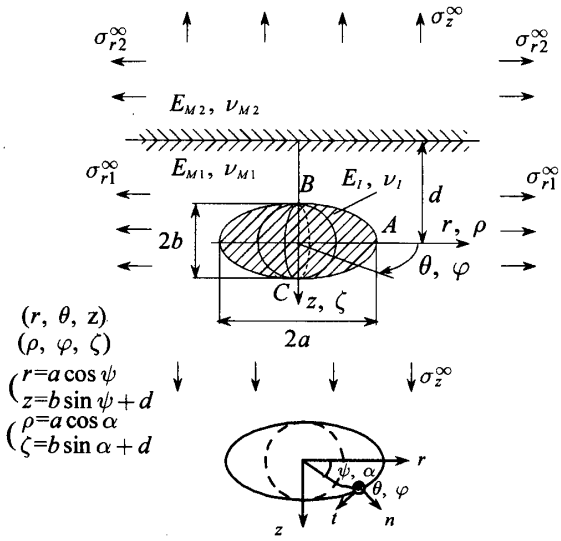


Fig.1 An ellipsoidal inclusion in the vicinity of a bimaterial interface.

* 原稿受付　2002年12月2日.
*1 正員，九州工業大学工学部(〒804-8550 北九州市戸畑区仙水町1-1).
*2 九州工業大学大学院.
E-mail: noda@mech.kyutech.ac.jp

NII-Electronic Library Service

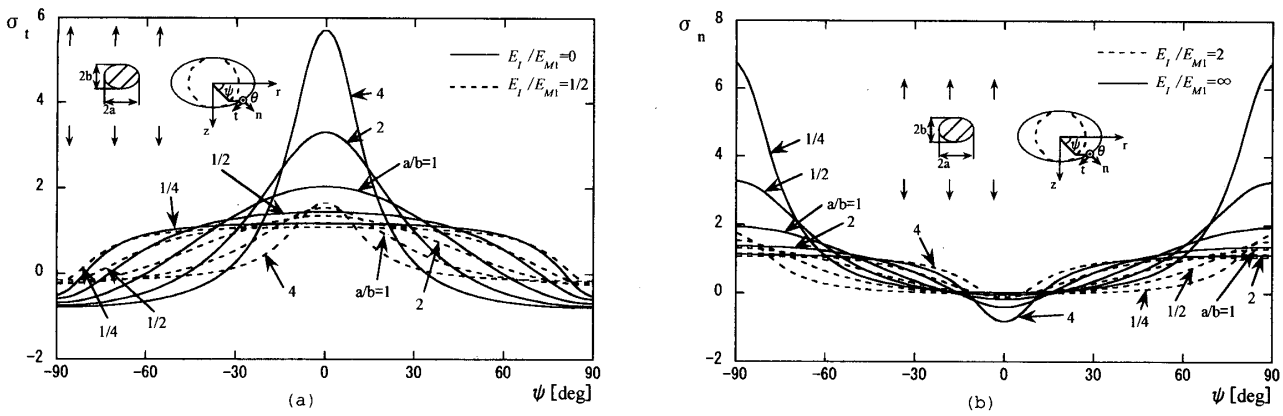


Fig.2 Interface stress of an ellipsoidal inclusion for b/d→0 in Fig.1 (a) σ_t when $E_I/E_{M1}<1$ (b) σ_n when $E_I/E_{M1}>1$.

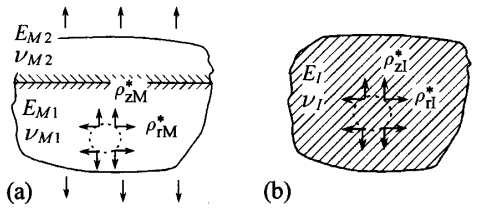


Fig.3 Method of solution.

の材質を系統的に変化させて最大応力や境界上の応力分布を求め，これらの変化が応力に及ぼす影響を検討する．本方法では異種接合界面と介在物の距離b/dや回転だ円体状介在物の形状比a/bを系統的に変化させて，母材と介在物の境界上の任意の点の応力を正確に求めることが可能である．一例として，図2に回転だ円体状介在物が単独に存在する場合の境界面の応力分布を示す．図2に示すように，本論文では，$E_I/E_{M1}<1$ では界面上の母材の σ_t(図1参照)が比較的大きいことに注目する．また，$E_I/E_{M1}>1$ では界面上の σ_n が界面の破壊に最も重要と考えて結果を表示する．

2. 解　析　方　法

図1に示すような，主軸長2a, 2bの回転だ円体状介在物を有する異種材料接合材が遠方で一様なz方向の引張応力 σ_z^∞ を受ける問題を体積力法を用いて解析する．

この問題は，重ね合わせの原理に基づく体積力法の考え方により，異種材料接合材中の半径 ρ，高さ ζ の円周上に半径方向および軸方向の集中力の輪が作用するときの任意の点(r, z)の応力場の解($K_{nn}^{Fr}, K_{nn}^{Fz}, K_{nt}^{Fr}, K_{nt}^{Fz}$)と変位場の解($K_{ur}^{Fr}, K_{ur}^{Fz}, K_{uz}^{Fr}, K_{uz}^{Fz}$)を用いて解くことができる．ここで，着力点の円柱座標系を(ρ, φ, ζ)として，注目点の円柱座標系を(r, θ, z)と区別して用いるものとすれば，$\rho=a\cos\alpha$，$\zeta=d+b\sin\alpha$，$r=a\cos\psi$，$z=d+b\sin\psi$ である．このとき問題は，母材1(E_{M1}, ν_{M1})と母材2(E_{M2}, ν_{M2})と同じ弾性定数を持つ異種接合体 M (図3(a))ならびに介在物(E_I，ν_I)と同じ弾性定数を持つ無限体 I (図3(b))中の仮想境界上に分布させた面積 $\rho d\phi ds$ の微小面素に作用させた体積力密度 $\rho_{rM}^*(\alpha), \rho_{zM}^*(\alpha), \rho_{rI}^*(\alpha), \rho_{zI}^*(\alpha)$ を未知関数とする特異積分方程式(1)～(2)で表現される．

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\{\rho_{rM}^*(\psi)\cos\psi_0+\rho_{zM}^*(\psi)\sin\psi_0\}-\frac{1}{2}\{\rho_{rI}^*(\psi)\cos\psi_0+\rho_{zI}^*(\psi)\sin\psi_0\}+\int_{-\pi/2}^{\pi/2}K_{nnM}^{Fr}(\alpha,\psi)\rho_{rM}^*(\alpha)ds+\int_{-\pi/2}^{\pi/2}K_{nnM}^{Fz}(\alpha,\psi)\rho_{zM}^*(\alpha)ds\\
&\quad-\int_{-\pi/2}^{\pi/2}K_{nnI}^{Fr}(\alpha,\psi)\rho_{rI}^*(\alpha)ds-\int_{-\pi/2}^{\pi/2}K_{nnI}^{Fz}(\alpha,\psi)\rho_{zI}^*(\alpha)ds=-(\sigma_z^\infty\sin^2\psi_0+\sigma_{rI}^\infty\cos^2\psi_0)\\
&\frac{1}{2}\{\rho_{rM}^*(\psi)\sin\psi_0-\rho_{zM}^*(\psi)\cos\psi_0\}+\frac{1}{2}\{\rho_{rI}^*(\psi)\sin\psi_0-\rho_{zI}^*(\psi)\cos\psi_0\}+\int_{-\pi/2}^{\pi/2}K_{ntM}^{Fr}(\alpha,\psi)\rho_{rM}^*(\alpha)ds+\int_{-\pi/2}^{\pi/2}K_{ntM}^{Fz}(\alpha,\psi)\rho_{zM}^*(\alpha)ds\\
&\quad-\int_{-\pi/2}^{\pi/2}K_{ntI}^{Fr}(\alpha,\psi)\rho_{rI}^*(\alpha)ds-\int_{-\pi/2}^{\pi/2}K_{ntI}^{Fz}(\alpha,\psi)\rho_{zI}^*(\alpha)ds=-(\sigma_z^\infty-\sigma_{rI}^\infty)\sin\psi_0\cos\psi_0 \qquad \cdots\cdots(1)\\
&\int_{-\pi/2}^{\pi/2}K_{urM}^{Fr}(\alpha,\psi)\rho_{rM}^*(\alpha)ds+\int_{-\pi/2}^{\pi/2}K_{urM}^{Fz}(\alpha,\psi)\rho_{zM}^*(\alpha)ds-\int_{-\pi/2}^{\pi/2}K_{urI}^{Fr}(\alpha,\psi)\rho_{rI}^*(\alpha)ds-\int_{-\pi/2}^{\pi/2}K_{urI}^{Fz}(\alpha,\psi)\rho_{zI}^*(\alpha)ds\\
&\quad=-\{\sigma_{rI}^\infty-\nu_{M1}(\sigma_{\theta I}^\infty+\sigma_z^\infty)\}r/E_{M1}\\
&\int_{-\pi/2}^{\pi/2}K_{uzM}^{Fr}(\alpha,\psi)\rho_{rM}^*(\alpha)ds+\int_{-\pi/2}^{\pi/2}K_{uzM}^{Fz}(\alpha,\psi)\rho_{zM}^*(\alpha)ds-\int_{-\pi/2}^{\pi/2}K_{uzI}^{Fr}(\alpha,\psi)\rho_{rI}^*(\alpha)ds-\int_{-\pi/2}^{\pi/2}K_{uzI}^{Fz}(\alpha,\psi)\rho_{zI}^*(\alpha)ds\\
&\quad=-\{\sigma_z^\infty-\nu_{M1}(\sigma_{rI}^\infty+\sigma_{\theta I}^\infty)\}z/E_{M1} \qquad \cdots\cdots(2)
\end{aligned}
$$

ここで，

$$
-\frac{\pi}{2}\le\psi\le\frac{\pi}{2},\ -d\rho=a\sin\alpha d\alpha\ ,\ d\zeta=b\cos\alpha d\alpha\ ,\ ds=\sqrt{a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha}d\alpha \qquad \cdots\cdots(3)
$$

である．また，Ψ_0 は点(r, z)における介在物の外向き法線とr軸となす角である．

NII-Electronic Library Service

異種接合材料 M_1 中の回転だ円体状空かとなるべき境界に生じる応力と変位をそれぞれ，σ_{nM}，τ_{ntM}，u_{rM}，u_{zM} 異種接合材料 I_1 中の回転だ円体状介在物となるべき境界に生じる応力と変位をそれぞれ，σ_{nI}，τ_{ntI}，u_{rI}，u_{zI} とすると，式(1)，(2)は母材と介在物の接合境界上における境界条件 $\sigma_{nM}-\sigma_{nI}=0$, $\tau_{ntM}-\tau_{ntI}=0$, $u_{rM}-u_{rI}=0$, $u_{zM}-u_{zI}=0$ に相当している．式(1)の第1項と第2項は，体積力を無限小近傍からなる境界上に作用させたとき境界条件を満たすべき仮想境界上に生じる応力の項である．また，$K^{Fr}_{nnM}(\alpha,\psi)$ を例にとると，これは異種接合材料 M_1 の仮想境界上の1円周上にr方向に集中力の輪が作用するとき境界上の点に生じる法線方向の垂直応力 σ_{nM} を意味している(付録参照)．式(1)はコーシー形，式(2)は対数形の特異性を有する項を含んでいる．そのため $\phi=\alpha$ の場合には，式(1)は積分のコーシーの主値をとるものとする．また，μ_i，ν_i $(i=1,2)$ はそれぞれの材料のである横弾性係数とポアソン比を表している．

本研究では，式(1)，(2)の特異積分方程式を精度よく解析するために，未知関数を前報[14]で定義した基本密度関数と重み関数の一次結合により式(4)，(5)のように表現する．

$$\rho^*_{rM}(\alpha)=\rho_{r3M}(\alpha)w_{r3}(\alpha)+\rho_{r4M}(\alpha)w_{r4}(\alpha),\ \rho^*_{zM}(\alpha)=\rho_{z1M}(\alpha)w_{z1}(\alpha)+\rho_{z2M}(\alpha)w_{z2}(\alpha) \quad \cdots\cdots(4)$$

$$\rho^*_{rI}(\alpha)=\rho_{r3I}(\alpha)w_{r3}(\alpha)+\rho_{r4I}(\alpha)w_{r4}(\alpha),\ \rho^*_{zI}(\alpha)=\rho_{z1I}(\alpha)w_{z1}(\alpha)+\rho_{z2I}(\alpha)w_{z2}(\alpha) \quad \cdots\cdots(5)$$

ここで，基本密度関数 $w_{r3}(\alpha)$，$w_{r4}(\alpha)$，$w_{z1}(\alpha)$，$w_{z2}(\alpha)$ などは次式で定義される[14]．

$$w_{r3}(\alpha)=n_r(\alpha),\ w_{r4}(\alpha)=n_r(\alpha)\sin\alpha,\ w_{z1}(\alpha)=n_z(\alpha)/\sin\alpha,\ w_{z2}(\alpha)=n_z(\alpha) \quad \cdots\cdots(6)$$

$$n_r(\alpha)=\frac{b\cos\alpha}{\sqrt{a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha}},\ n_z(\alpha)=\frac{a\sin\alpha}{\sqrt{a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha}} \quad \cdots\cdots(7)$$

さらに，未知関数を連続関数として近似するために重み関数を多項式を用いて次式のように表現する．

$$\begin{cases}\rho_{r3M}(\alpha)=\sum_{n=1}^{M/2}a_{nM}t_n(\alpha),\ \rho_{r3I}(\alpha)=\sum_{n=1}^{M/2}a_{nI}t_n(\alpha)\\ \rho_{r4M}(\alpha)=\sum_{n=1}^{M/2}b_{nM}t_n(\alpha),\ \rho_{r4I}(\alpha)=\sum_{n=1}^{M/2}b_{nI}t_n(\alpha)\end{cases}\qquad \begin{cases}\rho_{z1M}(\alpha)=\sum_{n=1}^{M/2}c_{nM}t_n(\alpha),\ \rho_{z1I}(\alpha)=\sum_{n=1}^{M/2}c_{nI}t_n(\alpha)\\ \rho_{z2M}(\alpha)=\sum_{n=1}^{M/2}d_{nM}t_n(\alpha),\ \rho_{z2I}(\alpha)=\sum_{n=1}^{M/2}d_{nI}t_n(\alpha)\end{cases}$$

$$t_n(\alpha)=\cos\{2(n-1)\alpha\} \quad \cdots\cdots(8)$$

ここで，Mは $-\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$ の範囲の選点数である．

以上の離散化の方法により式(1)，(2)は式(9)～(13)で示される $4M$ 元の連立方程式に還元できる．

$$\sum_{n=1}^{M/2}(a_{nM}A_{nM}+b_{nM}B_{nM}+c_{nM}C_{nM}+d_{nM}D_{nM}+a_{nI}A_{nI}+b_{nI}B_{nI}+c_{nI}C_{nI}+d_{nI}D_{nI})=-(\sigma_z^\infty\sin^2\varphi_0+\sigma_{r1}^\infty\cos^2\varphi_0) \quad \cdots\cdots(9)$$

$$\sum_{n=1}^{M/2}(a_{nM}E_{nM}+b_{nM}F_{nM}+c_{nM}G_{nM}+d_{nM}H_{nM}+a_{nI}E_{nI}+b_{nI}F_{nI}+c_{nI}G_{nI}+d_{nI}H_{nI})=-(\sigma_z^\infty-\sigma_{r1}^\infty)\sin\varphi_0\cos\varphi_0 \quad \cdots\cdots(10)$$

$$\sum_{n=1}^{M/2}(a_{nM}I_{nM}+b_{nM}J_{nM}+c_{nM}K_{nM}+d_{nM}L_{nM}+a_{nI}I_{nI}+b_{nI}J_{nI}+c_{nI}K_{nI}+d_{nI}L_{nI})=-\{\sigma_{r1}^\infty-\nu_M(\sigma_{\theta1}^\infty+\sigma_z^\infty)\}r/E_{M1} \quad \cdots\cdots(11)$$

$$\sum_{n=1}^{M/2}(a_{nM}M_{nM}+b_{nM}N_{nM}+c_{nM}O_{nM}+d_{nM}P_{nM}+a_{nI}M_{nI}+b_{nI}N_{nI}+c_{nI}O_{nI}+d_{nI}P_{nI})=-\{\sigma_z^\infty-\nu_M(\sigma_{r1}^\infty+\sigma_{\theta1}^\infty)\}z/E_{M1} \quad \cdots\cdots(12)$$

$$A_{nM}=-\frac{1}{2}t_n(\varphi)\cos^2\varphi_0+\int_{-\pi/2}^{\pi/2}K^{Fr}_{nnM}(\alpha,\varphi)t_n(\alpha)b\cos\alpha\,d\alpha \quad \cdots\cdots(13)$$

(他も同様)

任意の点の応力は4M個の係数 $a_{nM},\cdots,d_{nI}$ と $A_{nm},\cdots,P_{nI}$ に相当する影響係数の一次結合で表現される．以上の解析法により回転だ円体状介在物の境界上での最大応力ならびに応力分布を求める．以下では $\sigma_z^\infty=1$, $\sigma_{r1}^\infty=\sigma_{r2}^\infty=0$ とした．

3. 解析結果および考察

3.1 応力の収束性と境界条件の満足度　図1に示した異種材料接合界面近傍に存在する回転だ円体状介在物の問題において，形状比が a/b=1，b/d=0.9，剛性比 $E_I/E_{M1}=\infty$，$E_{M2}/E_{M1}=\infty$，ポアソン比 $\nu_{M1}=\nu_{M2}=\nu_I=0.3$ の場合，応力 σ_{tM}，σ_{nM}，τ_{ntM}，σ_{tI}，σ_{nI}，τ_{ntI} の収束状況を表1に示す．また，この場合の境界条件($\sigma_{tM}-\sigma_{tI}=0$, $\tau_{ntM}-\tau_{ntI}=0$, $u_{rM}-u_{rI}=0$, $u_{zM}-u_{zI}=0$)の満足度を確かめるため，それらの値を表2に示す．表1,2より本解析結果は，選点数 M=34 程度で有効数字5けた程度まで収束していて良好な収束性を示しており，境界条件も 10^{-4} 以下で満足されている

Table1 Convergence of the stress (a/b=1/4, b/d=0.9, $E_I/E_{M1}=\infty$, $E_{M2}/E_{M1}=\infty$, $\nu_M=\nu_I=0.3$, $\phi=-90°$).

M	σ_{tM}	σ_{tI}	σ_{nM}	σ_{nI}	τ_{ntM}	τ_{ntI}
12	4.9547	1.7204	11.7561	11.0177	-0.3906	-0.3688
16	4.9598	2.1250	11.7705	11.5497	-0.3910	-0.3851
24	4.9605	2.2971	11.7722	11.7494	-0.3912	-0.3911
34	4.9605	2.3161	11.7722	11.7712	-0.3912	-0.3915
36	4.9605	2.3162	11.7722	11.7713	-0.3912	-0.3914

Table2 Satisfaction of boundary conditions (a/b=1/4, b/d=0.9, $E_I/E_{M1}=\infty$, $E_{M2}/E_{M1}=\infty$, $\nu_M=\nu_I=0.3$, $\phi=-90°$).

M	$\sigma_{nM}-\sigma_{nI}$	$\tau_{ntM}-\tau_{ntI}$	$u_{rM}-u_{rI}$	$u_{zM}-u_{zI}$
12	$7.4\cdot10^{-1}$	$-2.2\cdot10^{-2}$	$2.9\cdot10^{-6}$	$-1.9\cdot10^{-4}$
16	$2.2\cdot10^{-1}$	$-5.9\cdot10^{-3}$	$5.0\cdot10^{-7}$	$-1.3\cdot10^{-5}$
24	$2.3\cdot10^{-2}$	$-1.3\cdot10^{-4}$	$7.1\cdot10^{-8}$	$1.4\cdot10^{-6}$
34	$9.6\cdot10^{-4}$	$2.2\cdot10^{-4}$	$2.5\cdot10^{-8}$	$5.8\cdot10^{-7}$
36	$8.7\cdot10^{-4}$	$2.0\cdot10^{-4}$	$2.1\cdot10^{-8}$	$4.9\cdot10^{-7}$

NII-Electronic Library Service

ことがわかった．このような検討によって本解析結果の良好な収束性と高い境界条た程度件の満足度が E_I/E_{M1}=0～∞，b/d=0～0.9のすべての結果で確認された．

3.2　球状介在物(a/b=1)の場合　表3に上述の応力の最大値とその発生位置を示す．ここでは材料1のヤング率 E_{M1} を基準にして E_{M2}/E_{M1}=0, 1/2, 2, ∞, E_I/E_{M1}=0, 1/2, 2, ∞と変化させた．また，界面からの距離に対して介在物の寸法をb/d=0, 1/3, 1/2, 2/3, 0.8, 0.9と変化させた．表3より以下がわかる．

(a) b/d≦0.9の範囲で界面からの影響がない場合(b/d→0)を基準とした球状介在物への界面の干渉効果を $\sigma_t/\sigma_t|_{b/d\to 0}$ または $\sigma_n/\sigma_n|_{b/d\to 0}$ として表現すると，その値は0.9～2.0の範囲に生じる．

(b) E_{M1} に比べて E_{M2} および E_I が小さいとき($E_{M2}/E_{M1}<1$ かつ $E_I/E_{M1}<1$)には介在物が界面に近づく(b/d→1)につれて σ_t は増加する．即ち，界面の干渉効果は危険側となる．

(c) E_{M1} に比べて E_{M2} および E_I が大きいとき($E_{M2}/E_{M1}>1$ かつ $E_I/E_{M1}>1$)には介在物が界面に近づく(b/d→1)につれて σ_n は増加することが多い．即ち，界面の干渉効果は危険側となることが多い．但し，E_I/E_{M1}=2で E_{M2}/E_{M1}=2, ∞のときなどb/d→1で最大応力は単純に増加せず，むしろ小さくなる場合がある．

(d) その他の場合[($E_{M2}/E_{M1}>1$ かつ $E_I/E_{M1}<1$)および($E_{M2}/E_{M1}<1$ かつ $E_I/E_{M1}>1$)]では介在物が界面に近づく(b/d→1)につれて σ_t や σ_n は減少する．即ち，界面の干渉効果は安全側となる．

(e) $E_I/E_{M1}<1$ での最大応力の発生位置はほとんどが ϕ=0°付近に生じる．しかし，介在物が界面に極めて近い場合(b/d≧0.8, $E_{M2}/E_{M1}=E_I/E_{M1}$=0)には ϕ≦-23°と界面側に移動する．一方，$E_I/E_{M1}>1$ で最大応力の発生位置はすべて ϕ=±90°に生じる．

3.3　回転だ円体状介在物の場合　表4に介在物の寸法をb/d=0.9と固定し，介在物の形状比a/bを変化させたときの最大応力の値とその発生位置を，b/d→0の場合と比較して示す．表4より以下がわかる．

(f) 界面からの影響がない場合(b/d→0)を基準として回転だ円体状介在物への界面の干渉効果を $\sigma_t/\sigma_t|_{b/d\to 0}$ または $\sigma_n/\sigma_n|_{b/d\to 0}$ として表現すると，その値はb/d≦0.9, 1/4≦a/b≦4の範囲で0.8～11の範囲に生じる．

(g) $E_I/E_{M1}<1$ ではa/b→∞で σ_t は増加する．しかし，干渉効果($\sigma_t/\sigma_t|_{b/d\to 0}$)は必ずしもa/b→∞で増加しない．

(h) $E_I/E_{M1}>1$ ではa/b→0で σ_n は増加する．この場合も干渉効果($\sigma_n/\sigma_n|_{b/d\to 0}$)は必ずしもa/b→0で増加しない．

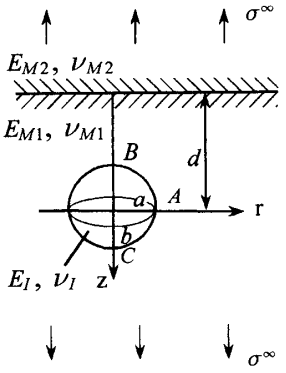
(i) $E_I/E_{M1}<1$ での最大応力の発生位置は ϕ=0°付近に生じる場合が多い．しかし，干渉が大きい場合は界面側に移動する．一方，$E_I/E_{M1}>1$ では一部の例外を除き最大応力は ϕ=±90°に生じる．

図4はb/d=0.9, $E_I/E_{M1}=E_{M2}/E_{M1}$=0と固定して，a/b=4, 2, 1, 1/2, 1/4と変化させる場合の σ_t の分布を示す．a/b→∞で ϕ≅-60°付近で σ_t が急激に増加して

Table3 Maximum stress of an ellipsoidal inclusion (a/b=1, $\nu_{M1}=\nu_{M2}=\nu_I$=0.3).

		Matrix		Matrix		Matrix		Matrix	
		E_I/E_{M1}=0		E_I/E_{M1}=1/2		E_I/E_{M1}=2		E_I/E_{M1}=∞	
E_{M2}/E_{M1}	b/d	ψ (deg.)	σ_t	ψ (deg.)	σ_t	ψ (deg.)	σ_n	ψ (deg.)	σ_n
0	0	0	2.045(1.00)	0	1.348(1.00)	±90	1.315(1.00)	±90	1.936(1.00)
	1/3	-0.7	2.101(1.03)	-0.2	1.361(1.01)	90	1.306(0.99)	90	1.900(0.98)
	1/2	-2.9	2.202(1.08)	-1.0	1.385(1.03)	90	1.288(0.98)	90	1.849(0.95)
	2/3	-8.1	2.364(1.16)	-2.8	1.427(1.06)	90	1.262(0.96)	90	1.794(0.93)
	0.8	-23.4	2.610(1.28)	-5.1	1.474(1.09)	90	1.242(0.94)	90	1.765(0.91)
	0.9	-58	3.822(1.87)	-7.2	1.511(1.12)	90	1.234(0.94)	90	1.758(0.91)
1/2	0	0	2.045(1.00)	0	1.348(1.00)	±90	1.315(1.00)	±90	1.936(1.00)
	1/3	-0.2	2.060(1.01)	0	1.351(1.00)	90	1.313(1.00)	90	1.926(0.99)
	1/2	-0.7	2.084(1.02)	-0.3	1.357(1.01)	90	1.309(1.00)	90	1.912(0.99)
	2/3	-1.5	2.110(1.03)	-0.5	1.363(1.01)	90	1.303(0.99)	90	1.896(0.98)
	0.8	-2.2	2.129(1.04)	-0.8	1.368(1.01)	90	1.299(0.99)	90	1.884(0.97)
	0.9	-2.7	2.140(1.05)	-1.0	1.371(1.02)	90	1.295(0.99)	90	1.878(0.97)
2	0	0	2.045(1.00)	0	1.348(1.00)	±90	1.315(1.00)	±90	1.936(1.00)
	1/3	0.2	2.033(0.99	0	1.345(1.00)	-90	1.321(1.00)	-90	1.963(1.01)
	1/2	0.6	2.014(0.98)	0.2	1.341(0.99)	-90	1.337(1.02)	-90	2.045(1.06)
	2/3	1.1	1.996(0.98)	0.4	1.338(0.99)	-90	1.368(1.04)	-90	2.236(1.15)
	0.8	1.5	1.986(0.97)	0.5	1.336(0.99)	-90	1.386(1.05)	-90	2.466(1.27)
	0.9	1.8	1.980(0.97)	0.5	1.335(0.99)	-90	1.374(1.04)	-90	2.611(1.35)
∞	0	0	2.045(1.00)	0	1.348(1.00)	±90	1.315(1.00)	±90	1.936(1.00)
	1/3	0.5	2.011(0.98)	0.1	1.341(0.99	-90	1.330(1.01)	-90	2.008(1.04)
	1/2	1.5	1.964(0.96)	0.5	1.331(0.99)	-90	1.366(1.04)	-90	2.236(1.15)
	2/3	2.8	1.922(0.94)	0.8	1.325(0.98)	-90	1.389(1.06)	-90	2.780(1.44)
	0.8	3.7	1.898(0.93)	1.0	1.323(0.98)	90	1.314(1.00)	-90	3.484(1.80)
	0.9	4.2	1.886(0.92)	1.1	1.322(0.98)	90	1.303(0.99)	-90	3.942(2.04)

( ): $\sigma_t/\sigma_t|_{b/d\to 0}$ or $\sigma_n/\sigma_n|_{b/d\to 0}$



NII-Electronic Library Service

いる．

図5はb/d=0.9，$E_I/E_{M1}=E_{M2}/E_{M1}=\infty$と固定して，a/b=4, 2, 1, 1/2, 1/4と変化させる場合のσ_nの分布を示す．a/b→0とすると，ϕ=-90°でσ_nがしだいに増加している．

図6はb/d=0.9，E_I/E_{M1}=0, a/b=2と固定して，E_{M2}/E_{M1}=0, 1/2, 2, ∞と変化させる場合のσ_tの分布をb/d→0と比

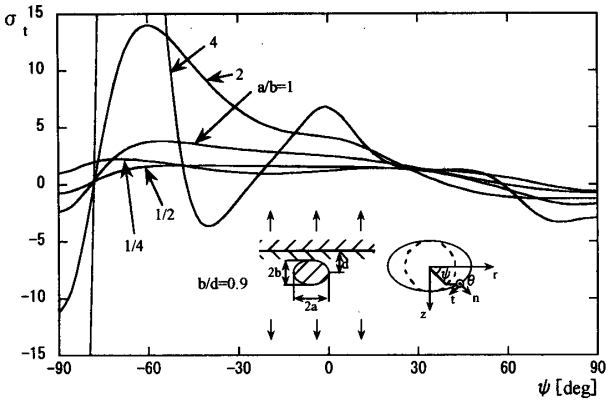


Fig.4 Interface stress σ_t for $E_I/E_{M1}=E_{M2}/E_{M1}=0$.

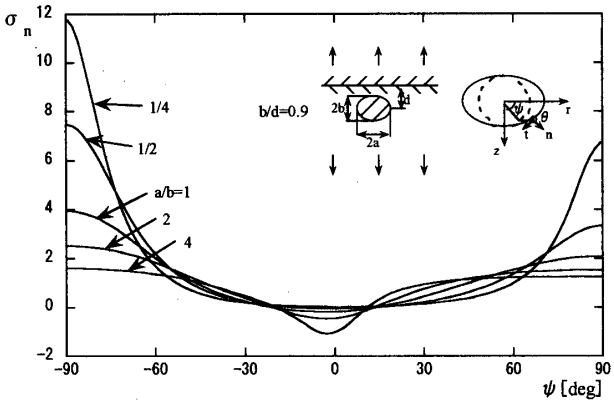


Fig.5 Interface stress σ_n for $E_I/E_{M1}=E_{M2}/E_{M1}=\infty$.

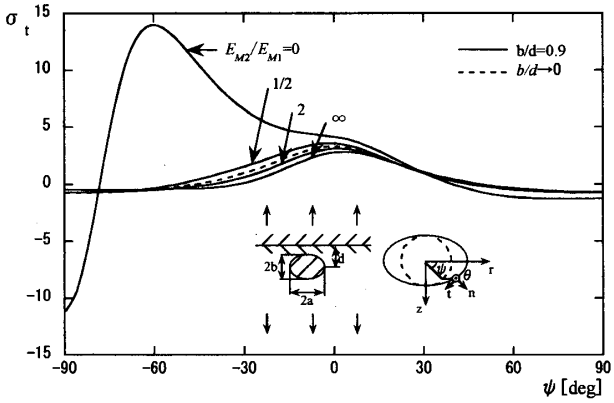


Fig.6 Interface stress σ_t for $E_I/E_{M1}=0$ and a/b=2.

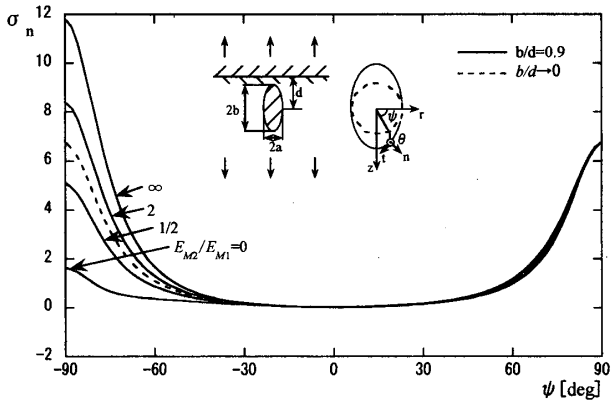


Fig.7 Interface stress σ_n for $E_I/E_{M1}=\infty$ and a/b=1/4.

Table4 Maximum stress of an ellipsoidal inclusion when b/d=0.9 and b/d→0 (see Fig.1).
The results of b/d→0 are independent of E_{M2}/E_{M1}. $\nu_{M1}=\nu_{M2}=\nu_I=0.3$

		b/d→0		b/d=0.9							
				$E_{M2}/E_{M1}=0$		$E_{M2}/E_{M1}=1/2$		$E_{M2}/E_{M1}=2$		$E_{M2}/E_{M1}=\infty$	
E_I/E_{M1}	a/b	$\sigma_t\|_{b/d\to0}$	ψ(deg.)	$\sigma_t(\sigma_t/\sigma_t\|_{b/d\to0})$	ψ(deg.)	$\sigma_t(\sigma_t/\sigma_t\|_{b/d\to0})$	ψ(deg.)	$\sigma_t(\sigma_t/\sigma_t\|_{b/d\to0})$	ψ(deg.)	$\sigma_t(\sigma_t/\sigma_t\|_{b/d\to0})$	ψ(deg.)
0	4	5.868	0	61.809(10.53)	-67.9	6.544(1.12)	-0.5	5.373(0.92)	0.5	4.624(0.79)	1.5
	2	3.313	0	13.992(4.22)	-60.1	3.584(1.08)	-1.6	3.122(0.94)	1.2	2.846(0.86)	3.2
	1	2.045	0	3.822(1.87)	-58	2.140(1.05)	-2.7	1.980(0.97)	1.8	1.886(0.92)	4.3
	1/2	1.440	0	1.681(1.17)	-49.2	1.467(1.02)	-3	1.421(0.99)	2	1.391(0.97)	4.6
	1/4	1.172	0	2.258(1.92)	-70	1.184(1.01)	9.7	1.167(1.00)	-2.7	1.158(0.99)	3.5
1/2	4	1.703	0	1.730(1.02)	-0.4	1.710(1.00)	-0.1	1.702(1.00)	0.1	1.728(1.01)	0
	2	1.544	0	1.657(1.07)	-2.2	1.564(1.01)	-0.4	1.533(0.99)	0.2	1.533(0.99)	0.5
	1	1.348	0	1.511(1.12)	-7.2	1.371(1.02)	-1	1.335(0.99)	0.5	1.322(0.98)	1.1
	1/2	1.181	0	1.273(1.08)	-23.5	1.193(1.01)	-2.2	1.174(0.99)	1.5	1.166(0.99)	3.4
	1/4	1.079	0	1.138(1.05)	-43	1.083(1.00)	-6	1.077(1.00)	4	1.078(1.00)	10
		$\sigma_n\|_{b/d\to0}$	ψ(deg.)	$\sigma_n(\sigma_n/\sigma_n\|_{b/d\to0})$	ψ(deg.)	$\sigma_n(\sigma_n/\sigma_n\|_{b/d\to0})$	ψ(deg.)	$\sigma_n(\sigma_n/\sigma_n\|_{b/d\to0})$	ψ(deg.)	$\sigma_n(\sigma_n/\sigma_n\|_{b/d\to0})$	ψ(deg.)
2	4	1.071	±90	1.002(0.94)	-90	1.059(0.99)	90	1.112(1.04)	-90	2.009(1.88)	-34.4
	2	1.159	±90	1.052(0.91)	90	1.130(0.98)	90	1.201(1.04)	-90	1.191(1.03)	90
	1	1.315	±90	1.234(0.94)	90	1.295(0.98)	90	1.374(1.04)	-90	1.303(0.99)	90
	1/2	1.531	±90	1.506(0.98)	90	1.532(1.00)	90	1.617(1.06)	-90	1.482(0.97)	90
	1/4	1.742	±90	1.933(1.11)	90	1.810(1.04)	90	1.859(1.07)	-90	1.848(1.06)	-90
∞	4	1.128	±90	1.317(1.17)	90	1.150(1.02)	90	1.241(1.10)	-90	1.612(1.43)	-90
	2	1.378	±90	1.663(1.21)	90	1.393(1.01)	90	1.692(1.23)	-90	2.519(1.83)	-90
	1	1.936	±90	1.758(0.91)	90	1.878(0.97)	90	2.611(1.35)	-90	3.942(2.04)	-90
	1/2	3.272	±90	3.280(1.00)	90	3.261(1.00)	90	4.557(1.39)	-90	7.478(2.29)	-90
	1/4	6.725	±90	6.690(0.99)	90	6.711(1.00)	90	8.352(1.24)	-90	11.772(1.75)	-90

NII-Electronic Library Service

較して示す．$E_{M2}/E_{M1}=0$ では干渉は大きく表れるが，他の干渉効果はそれほど大きくない．

図7はb/d=0.9，$E_I/E_{M1}=\infty$，a/b=1/4と固定して，E_{M2}/E_{M1}を変化させる場合のσ_nの分布をb/d→0と比較して示す．$E_{M2}/E_{M1}\to\infty$に従って干渉効果が大きくなる．一方，$E_{M2}/E_{M1}\to 0$ では干渉効果は安全側に作用する．

4. 結　言

本研究では，体積力法の特異積分方程式を用いて，異種材料接合界面近傍に存在する回転だ円体状介在物による応力集中問題について精度よく解析する方法を示し，接合材料の剛性比，介在物の剛性比，形状比，距離の変化が応力に及ぼす影響を考察した．結果を図表に示したほか結論をまとめると以下のようになる．

(1)　異種接合材料領域の軸対称問題の解析に有用な半径方向と軸方向の集中力の輪が作用するときの応力と変位の基本解を文献[15]の表現を積分して求め，すべて明示した．

(2)　数値解析方法として，特異積分方程式の数値解析に未知関数である体積力密度を4種類の基本密度関数と多項式の積で近似する方法[14]を用いることにより，良好な収束性と高い境界条件の満足度を確認した．

(3)　$E_I/E_{M1}<1$ では界面上の母材のσ_tに注目し，$E_I/E_{M1}>1$ では界面のσ_nに注目して，異種材料接合界面近傍に存在する回転だ円体状介在物による応力集中問題の解析を行った結果，a/b=1で接合材料の剛性比$E_{M2}/E_{M1}=0$，介在物の剛性比$E_I/E_{M1}=0$および$E_{M2}/E_{M1}=\infty$，$E_I/E_{M1}=\infty$のときにはb/d=0.9で最大応力はb/d→0の約2倍になっており，異種材料接合界面の干渉効果が大きいことがわかった．一方，1/4≦a/b≦4の範囲の回転だ円体状介在物ではb/d≦0.9の範囲でb/d→0を基準とした干渉効果は0.8～11の範囲に生じる．

(4)　介在物と異種材料接合界面からの距離b/d=0.9と固定したとき，$E_I/E_{M1}<1$では最大応力がa/b→∞で増加し，$E_I/E_{M1}>1$では，a/b→0で増加する．しかし，干渉効果（$\sigma_t/\sigma_t|_{b/d\to 0}$および$\sigma_n/\sigma_n|_{b/d\to 0}$）は必ずしもa/b→∞，0で増加しないことがわかった．

付録：　異種接合材料中に作用する集中力の輪による応力と変位の式

式(1)，(2)に含まれる$K^{Fr}_{nnM}(\alpha,\psi)$などは式(14)～(28)で示される集中力の輪による応力場，変位場の式に母材の弾性定数や着力点の座標を代入したものとして表される．これらは文献[15]の基本解を積分して導かれる．

$$K^{Fr}_{nn}=\sigma^{Fr}_n=\sigma^{Fr}_r\cos^2\psi+\sigma^{Fr}_z\sin^2\psi+2\tau^{Fr}_{rz}\cos\psi\sin\psi,\ K^{Fz}_{nn}=\sigma^{Fz}_n=\sigma^{Fz}_r\cos^2\psi+\sigma^{Fz}_z\sin^2\psi+2\tau^{Fz}_{rz}\cos\psi\sin\psi \quad\cdots\cdots(14)$$

$$K^{Fr}_{nt}=\tau^{Fr}_{nt}=(\sigma^{Fr}_z-\sigma^{Fr}_r)\cos\psi\sin\psi+2\tau^{Fr}_{rz}(\cos^2\psi-\sin^2\psi),\ K^{Fz}_{nt}=\tau^{Fz}_{nt}=(\sigma^{Fz}_z-\sigma^{Fz}_r)\cos\psi\sin\psi+2\tau^{Fz}_{rz}(\cos^2\psi-\sin^2\psi) \quad\cdots(15)$$

$$\begin{aligned}K^{Fr}_{ur}=U^{Fr}_r=&A\left[\kappa_1 r_m^2 I_{1,1}-\{r\rho I_{3,0}-(r^2+\rho^2)I_{3,1}+r\rho I_{3,2}\}+\frac{1}{2}r_m^2 C\{2\kappa_1^2-S(\kappa_1^2-1)\}J_{1,1}+2Cz\zeta J_{3,1}\right.\\&\left.-C\kappa_1\{r\rho J_{3,0}-(r^2+\rho^2)J_{3,1}+r\rho J_{3,2}\}/r_m^2+6Cz\zeta\{r\rho J_{5,0}-(r^2+\rho^2)J_{5,1}+r\rho J_{5,2}\}/r_m^2\right]\\&+A\int_0^\pi\frac{S(\kappa_1+1)\{C(\kappa_1-1)-2T\}}{2(R_2+z+\zeta)}\left[\cos\varphi+\frac{1}{R_2(R_2+z+\zeta)}\{r^2\rho-r(r^2+2\rho^2)\cos\varphi+\rho(2r^2+\rho^2)\cos^2\varphi-r\rho^2\cos^3\varphi\}\right]d\varphi\end{aligned} \quad\cdots\cdots(16)$$

$$\begin{aligned}K^{Fr}_{uz}=u^{Fr}_z=&A\left[(z-\zeta)(-\rho I_{3,0}+rI_{3,1})+C\kappa_1(z-\zeta)(-\rho J_{3,0}+rJ_{3,1})-6Cz\zeta(z+\zeta)(-\rho J_{5,0}+rJ_{5,1})/r_m^2\right]\\&+A\int_0^\pi\frac{TS(\kappa_1+1)}{R_2(R_2+z+\zeta)}(-\rho+r\cos\varphi)d\varphi\end{aligned} \quad\cdots\cdots(17)$$

$$\begin{aligned}K^{Fz}_{ur}=u^{Fz}_r=&A\left[(z-\zeta)(rI_{3,0}-\rho I_{3,1})+C\kappa_1(z-\zeta)(rJ_{3,0}-\rho J_{3,1})+6Cz\zeta(z+\zeta)(rJ_{5,0}-\rho J_{5,1})/r_m^2\right]\\&-A\int_0^\pi\frac{TS(\kappa_1+1)}{R_2(R_2+z+\zeta)}(r-\rho\cos\varphi)d\varphi\end{aligned} \quad\cdots\cdots(18)$$

$$K^{Fz}_{uz}=u^{Fz}_z=A\left[\kappa_1 I_{1,0}+(z-\zeta)I_{3,0}+r_m^2\{C\kappa_1^2-TS(\kappa_1+1)\}J_{1,0}+\{C\kappa_1(z+\zeta)^2-2Cz\zeta\}J_{3,0}+6Cz\zeta(z+\zeta)^2J_{5,0}/r_m^2\right] \quad\cdots\cdots(19)$$

$$\begin{aligned}\sigma^{Fr}_r=&B\left[\frac{1}{2}(1-\kappa_1)(\rho I_{3,0}+rI_{3,1}-2\rho I_{3,2})+3\{r^2\rho I_{5,0}-r(r^2+2\rho^2)I_{5,1}+\rho(2r^2+\rho^2)I_{5,2}-r\rho^2 I_{5,3}\}/r_m^2\right.\\&-\frac{1}{2}C(1-\kappa_1)\{S(\kappa_1+1)(rJ_{3,1}-\rho J_{3,2})-\kappa_1(\rho J_{3,0}+rJ_{3,1}-2\rho J_{3,2})\}+3C\{(\kappa_1+3)(z+\zeta)\zeta-6\zeta^2\}(\rho J_{5,0}-rJ_{5,1})/r_m^2\\&+3C\kappa_1\{r^2\rho J_{5,0}-r(r^2+2\rho^2)J_{5,1}+\rho(2r^2+\rho^2)J_{5,2}-r\rho^2 J_{5,3}\}/r_m^2-12C\rho z\zeta(\rho J_{5,0}-rJ_{5,2})/r_m^2\\&\left.-30Cz\zeta\{r^2\rho J_{7,0}-r(r^2+2\rho^2)J_{7,1}+\rho(2r^2+\rho^2)J_{7,2}-r\rho^2 J_{7,3}\}/r_m^4\right]\\&+B\int_0^\pi\frac{S(\kappa_1+1)\{C(\kappa_1-1)-2T\}}{2R_2(R_2+z+\zeta)^2}\left[\rho-3r\cos\varphi-2\rho\cos^2\varphi+\frac{3R_2+z+\zeta}{R_2^2(R_2+z+\zeta)}\{r^2\rho-r(r^2+2\rho^2)\cos\varphi\right.\\&\left.+\rho(2r^2+\rho^2)\cos^2\varphi-r\rho^2\cos^3\varphi\right]d\varphi\end{aligned} \quad\cdots\cdots(20)$$

$$\begin{aligned}\sigma^{Fr}_z=&B\left[\frac{1}{2}(1-\kappa_1)(\rho I_{3,0}+rI_{3,1})+3(z-\zeta)^2(\rho I_{5,0}-rI_{5,1})/r_m^2-\frac{1}{2}\{C\kappa_1(\kappa_1-1)-2TS(\kappa_1+1)\}(\rho J_{3,0}-rJ_{3,1})\right.\\&\left.+3C\{\kappa_1(z+\zeta)^2-(\kappa_1-1)\zeta(z+\zeta)-2\zeta^2\}(\rho J_{5,0}-rJ_{5,1})/r_m^2-30Cz\zeta(z+\zeta)^2(\rho J_{7,0}-rJ_{7,1})/r_m^4\right]\end{aligned} \quad\cdots\cdots(21)$$

$$\sigma^{Fr}_\theta=B\left[-\frac{1}{2}(1-\kappa_1)(\rho I_{3,0}+rI_{3,1}-2\rho I_{3,2})+3\rho^2(\rho I_{5,0}-rI_{5,1}-\rho I_{5,2}+rI_{5,3})/r_m^2\right.$$

NII-Electronic Library Service

$$+\frac{1}{2}C(1-\kappa_1)\{S(\kappa_1+1)(rJ_{3,0}-\rho J_{3,2})+\kappa_1(\rho J_{3,0}+rJ_{3,1}-2\rho J_{3,2})\}+3C\kappa_1\rho^2(\rho J_{5,0}-rJ_{5,1}-\rho J_{5,2}+rJ_{5,3})/r_m^2$$
$$+3C\{(\kappa_1+3)(z+\zeta)\zeta-6\zeta^2\}(\rho J_{5,0}+rJ_{5,1})/r_m^2+12Cz\zeta(rJ_{5,1}-\rho J_{5,2})/r_m^2-30Cz\zeta\rho^2(\rho J_{7,0}-rJ_{7,1}-\rho J_{7,2}+rJ_{7,3})/r_m^4]$$
$$+B\int_0^\pi\frac{S(\kappa_1+1)\{C(\kappa_1-1)-2T\}}{2R_2(R_2+z+\zeta)^2}\left[3\rho-r\cos\varphi-2\rho\cos^2\varphi-\frac{3R_2+z+\zeta}{R_2^2(R_2+z+\zeta)}\rho^2(\rho-r\cos\varphi-\rho\cos^2\varphi+r\cos^3\varphi)\right]d\varphi \quad\cdots(22)$$

$$\tau_{rz}^{Fr}=B\left[\frac{1}{2}(1-\kappa_1)(z-\zeta)I_{3,1}+3(z-\zeta)\{r\rho I_{5,0}-(r^2+\rho^2)I_{5,1}+r\rho I_{5,2}\}/r_m^2+\frac{C}{4}(\kappa_1-1)\{S(\kappa_1+1)-2\kappa_1\}J_{3,1}\right.$$
$$+3C\{\kappa_1(z+\zeta)-(\kappa_1-1)\zeta\}\{r\rho J_{5,0}-(r^2+\rho^2)J_{5,1}+r\rho J_{5,2}\}/r_m^2-6Cz\zeta(z+\zeta)J_{5,1}/r_m^2$$
$$\left.-30Cz\zeta(z+\zeta)\{r\rho J_{7,0}-(r^2+\rho^2)J_{7,1}+r\rho J_{7,2}\}/r_m^4\right]$$
$$-B\int_0^\pi\frac{S(\kappa_1+1)\{C(\kappa_1-1)-4T\}}{4R_2(R_2+z+\zeta)}\left[\cos\varphi+\frac{2R_2+z+\zeta}{R_2^2(R_2+z+\zeta)}\{r\rho-(r^2+\rho^2)\cos\varphi+r\rho\cos^2\varphi\}\right]d\varphi \quad\cdots\cdots(23)$$

$$\sigma_r^{Fz}=B\left[\frac{1}{2}(\kappa_1-1)(z-\zeta)I_{3,0}-3(z-\zeta)(r^2I_{5,0}-2r\rho I_{5,1}+\rho^2I_{5,2})/r_m^2+\frac{1}{2}C(\kappa_1-1)\{(\kappa_1+3)(z+\zeta)+3(z-\zeta)\}J_{3,0}\right.$$
$$+3C(z+\zeta)\{(\kappa_1-1)\zeta(z+\zeta)-2\zeta^2\}J_{5,0}/r_m^2-3C\kappa_1(z-\zeta)(r^2J_{5,0}-2r\rho J_{5,1}+\rho^2J_{5,2})/r_m^2$$
$$\left.-30Cz\zeta(z+\zeta)(r^2J_{7,0}-2r\rho J_{7,1}+\rho^2J_{7,2})/r_m^4\right]-B\int_0^\pi\frac{TS(\kappa_1+1)}{R_2(R_2+z+\zeta)}\left[1-\frac{3R_2+z+\zeta}{R_2^2(R_2+z+\zeta)}(r^2-2r\rho\cos\varphi+\rho^2\cos^2\varphi)\right]d\varphi$$
$$\cdots\cdots(24)$$

$$\sigma_z^{Fz}=B\left[\frac{1}{2}(1-\kappa_1)(z-\zeta)I_{3,0}-3(z-\zeta)^3I_{5,0}/r_m^2+\frac{1}{2}(z+\zeta)\{2TS(\kappa_1+1)-C(\kappa_1^2-3)\}J_{3,0}+\frac{1}{2}\{C(\kappa_1-3)(z-\zeta)-4C\zeta\}J_{3,0}\right.$$
$$\left.-3C(z+\zeta)\{\kappa_1z(z+\zeta)-\zeta(5z-\zeta)\}J_{5,0}/r_m^2-30Cz\zeta(z+\zeta)^3J_{7,0}/r_m^4\right] \quad\cdots\cdots(25)$$

$$\sigma_\theta^{Fz}=B\left[-\frac{1}{2}(1-\kappa_1)(z-\zeta)I_{3,0}-3\rho^2(z-\zeta)(I_{5,0}-I_{5,2})/r_m^2+\frac{1}{2}C(\kappa_1-1)\{(\kappa_1-3)(z+\zeta)+3(z-\zeta)\}J_{3,0}\right.$$
$$\left.+3C\zeta(z+\zeta)\{(\kappa_1-1)(z+\zeta)-2\zeta\}J_{5,0}/r_m^2-3C\kappa_1\rho^2(z-\zeta)(J_{5,0}-J_{5,2})/r_m^2-30Cz\zeta\rho^2(z+\zeta)(J_{7,0}-J_{7,2})/r_m^4\right]$$
$$-B\int_0^\pi\frac{TS(\kappa_1+1)}{R_2(R_2+z+\zeta)}\left[1-\frac{2R_2+z+\zeta}{R_2^2(R_2+z+\zeta)}\rho^2(1-\cos^2\varphi)\right]d\varphi \quad\cdots\cdots(26)$$

$$\tau_{rz}^{Fz}=B\left[\frac{1}{2}(1-\kappa_1)(rI_{3,0}-\rho I_{3,1})-3(z-\zeta)^2(rI_{5,0}-\rho I_{5,1})/r_m^2+\frac{1}{2}\{C\kappa_1(1-\kappa_1)+2TS(\kappa_1+1)\}(rJ_{3,0}-\rho J_{3,1})\right.$$
$$\left.-3C\{\kappa_1z(z+\zeta)-\zeta(3z-\zeta)\}(rJ_{5,0}-\rho J_{5,1})/r_m^2-30Cz\zeta(z+\zeta)^2(rJ_{7,0}-\rho J_{7,1})/r_m^4\right] \quad\cdots\cdots(27)$$

ここで,

$$I_{n,m}=\int_0^\pi\frac{\cos^m\varphi}{(e_1-\cos\varphi)^{n/2}}d\varphi,\ J_{n,m}=\int_0^\pi\frac{\cos^m\varphi}{(e_2-\cos\varphi)^{n/2}}d\varphi,\ e_1=1+\frac{(r-\rho)^2+(z-\varsigma)^2}{2r\rho},\ e_2=1+\frac{(r-\rho)^2+(z+\varsigma)^2}{2r\rho}$$
$$A=\frac{\rho}{2\mu_1\pi(\kappa_1+1)r_m^3},\ B=\frac{\rho}{\pi(\kappa_1+1)r_m^3},\ C=\frac{1-\Gamma}{1+\Gamma\kappa_1},\ S=\frac{2}{1+\Gamma},\ \mathrm{T}=\frac{1}{4}\left[\frac{\kappa_1-1}{1+\Gamma\kappa_1}-\frac{(\kappa_2-1)}{\kappa_2+\Gamma}\right],\ \Gamma=\frac{\mu_2}{\mu_1},\ \kappa_1=3-4\nu_1,\ \kappa_2=3-4\nu_2$$
$$\mathrm{r_m}=\sqrt{2r\rho},\ \mathrm{R}_2^2=r^2+\rho^2+(z+\zeta)^2-2r\rho\cos\varphi \quad\cdots\cdots(28)$$

ここで，$I_{n,m}$, $J_{n,m}$ は完全だ円積分で表される[16].

文　献

(1) Erdogan, F., and Aksogan, O., Bonded Half Planes Containing an Arbitrarily Oriented Crack, Int.J.Solids Structures, **10**(1974), 569-585.

(2)Cook, T.S., and Erdogan, F., Stresses in Bonded Materials with a Crack Perpendicular to the Interface, Int.J.Engng.Sci., **10**(1972), 677-697.

(3) 石田誠・野口博司，任意分布き裂郡を持つ接合半無限体の面内荷重問題，機論，**49**-437 A(1983), 36-45.

(4) Willis, J.R., The Penny-Shaped Crack on an Interface, Q.J.Mech. &Apple.Math., **25**(1972), 367-385.

(5)Erdogan, F., and Arin, K., Penny-Shaped Interface Crack between an Elastic Layer and a Half-Space, Int.J.Solids Structure., **8**(1972), 93-109.

(6)Kassir, M.K., and Bregman, A.M., The Stress Intensity Factor for a Penny-Shaped Crack between Two Dissimilar Materials, ASME Journal of Applied Mechanics, **39**(1972), 301-308.

(7)Shibuya, T., et al., Stress Analysis of the Vicinity of an Elliptical Crack at the Interface of Two Bounded Half-Spaces, JSME Int.J., **32**(1989), 485-491.

(8)Nakamura, T., Three-Dimensional Stress Fields of Elastic Interfaces Cracks, ASME Journal of Applied Mechanics, **58**(1991), 939-946.

(9) 結城良治・許金泉，三次元異材継手・異材界面き裂のBEM解析，機論，**58**-545, A(1992), 39-46.

(10) 野田尚昭・大園瑠里・陳夢成，異種材料接合界面に平行に存在するだ円形き裂の引張りにおける応力拡大係数の解析，機論，**68**-674, A(2002), 1453-1459.

(11)Kouris, D., Mura, T., The Elastic Field of a Hemispherical Inhomogeneity at the Free Surface of an Elasitc Half Space, J. Mech. Phys. Solids, **37**(1989), 365-379.

(12)Jasiuk, I., Sheng, P., Tsuchida, E., A Spherical Inclusion in an Elastic Half-Space under Shear, ASME Journal of Applied Mechanics, **64**(1997), 471-479.

(13)Lee, M., Jasiuk, I., Tsuchida, E.,The Sliding Circular Inclusion in an Elasitc Half-Plane, ASME Journal of Applied Mechanics, **59**(1992), S57-S64.

(14) 野田尚昭・松尾忠利，応力集中問題における体積力法の特異積分方程式の数値解析法（第2報，切欠きの干渉問題の一般的解法），機論，**59**-559, A(1993), 785-791.

(15) 陳夢成・野田尚昭，三次元異種接合半無限体の集中力による変位と応力の基本解，機械の研究，**55**-4, (2003), 468-475.

(16) 野田尚昭，円周切欠きを有する丸棒のねじり，引張り，曲げにおける応力集中問題の解析，九州大学学位論文，(1984).

NII-Electronic Library Service